

# Heisenbergin epätarkkuusperiaate 80 vuotta

– Werner Heisenbergin ajatukset voidaan vihdoin johtaa kvanttimekaniikan teoriasta

Teiko Heinonen, Pekka Lahti

Fysiikan laitos, Turun yliopisto

## Johdanto

Heisenbergin epätarkkuusperiaate, jota paikkaa ja liikemäärää koskeva epäyhtälö

$$\Delta q \cdot \Delta p \gtrsim \hbar \quad (1)$$

symboloi, on ehkä vielä nykyäänkin kvanttimekaniikan tunnetuin yksittäinen erityispiirre. Tämän periaatteen lähtökohtaa kuvaillaan usein seuraavilla intuitiivisilla, teorian puitteissa helposti täsmennettävillä mahdotto-muustuloksilla:

(a) Paikalla ja liikemäärällä ei voi olla samanaikaisesti täsmällisiä arvoja.

(b) Paikkaa ja liikemäärää ei voida mitata samanaikaisesti.

(c) Paikan mittaaminen välttämättä muuntaa systeemin liikemäärää, ja päinvastoin.

Kuuluisassa vuoden 1927 artikkelissaan [1] **Werner Heisenberg** (1901–1976) keksi nimeään kantavan epäyhtälön (1) luonnehtimaan niitä operationaalisia mahdollisuuksia, jotka kvanttimekaniikka rajoituksista (a), (b) ja (c) huolimatta pitää sisällään:

(A) Epäyhtälö (1) kuvaa mah-

dollisuuksia preparoida systeemi paikan ja liikemäärän hajontojen  $\Delta q$  ja  $\Delta p$  osalta.

(B) Epäyhtälö (1) kuvaa mittaustarkkuuksia  $\Delta q$  ja  $\Delta p$ , joiden puitteissa paikka ja liikemäärä voidaan yhdessä mitata.

(C) Epäyhtälö (1) kuvaa tarkkuudella  $\Delta q$  suoritettujen paikan mittausten välttämättä aiheuttamaa häiriötä  $\Delta p$  liikemäärään.

Esittelemme artikkelimme aluksi ne uranuurtajakvanttimekaniikan sisältämät tunnetut tulokset, jotka liittyvät epätarkkuusperiaatteen muotoiluun.<sup>1</sup>

Tämän jälkeen esittelemme ehtojen (B) ja (C) kvantitatiivisessa analyysissä tarvittavan teorian laajennuksen. Artikkelin viimeisessä jaksossa kuvailemme ehtoihin (B) ja (C) liittyvät melko tuoreet matemaattiset tulokset, joiden mukaan epäyhtälön (1) kaltainen relaatio on riittävä ja välttämätön ehto puheena oleville mahdollisuuksille.

Tämä artikkeli pohjautuu kirjoitukseen [2], joka sisältää yksityiskoh- taisemman ja kattavamman katsauk-

sen paikan ja liikemäärän epätarkkuusperiaatteen kysymyksiin ja vii-meaikaiseen kehitykseen. Arkhime- deksen sivuilla asiaa on aiemmin tarkasteltu mm. artikkelissa [3]; nyt kä- sillä oleva kirjoitus päivittää tämän artikkelin.

Koska aiheenamme on paikan ja liikemäärän epätarkkuusrelaatio ja sen tulkinta, tyydymme tarkastelemaan vain yhden vapausasteen fysikaalista systeemiä, jonka kvanttimekaniikan mukainen kuvaus annetaan neliöllisesti integroituvien funktioiden muodostamassa Hilbertin avaruudessa, Lebesguen funktioavaruudessa  $L^2(\mathbb{R})$ . Paikka- ja liikemääräoperaattorit  $\hat{Q}$  ja  $\hat{P}$  ovat tällöin tutut itseadjungoidut multiplikatiivi- ja differenti-aalioperaattorit  $(\hat{Q}\psi)(x) = x\psi(x)$  ja  $(\hat{P}\psi)(x) = -i\hbar\psi'(x)$ . Näitä operaattoreita vastaavat spektraalimitat  $Q$  ja  $P$  ovat paikkasuure ja liikemääräsuure. Esimerkiksi paikkasuureen  $Q$  reaalityökalijoukkoon (Borelin joukkoon)  $X \subset \mathbb{R}$  liittämä spektraaliprojektio  $Q(X)$  on joukon  $X$  karakteris- tisella funktiolla  $\chi_X$  kertomisoperaattori, eli  $(Q(X)\psi)(x) = \chi_X(x)\psi(x)$ .

<sup>1</sup>Tarkoitamme uranuurtajakvanttimekaniikalla sitä kvanttimekaniikan muotoilua, joka hahmottui teorian pääarkkitehtien töissä ja joka kiteytyi **John von Neumannin** (1903–1957), **Paul Diracin** (1902–1984), ja **Wolfgang Paulin** (1900–1958) kuuluisissa monografioissa vuosilta 1932, 1930, ja 1933.

Koska liikemäärä synnyttää paikkasiirtoja ja paikka/massa nopeussäyksiä, suureiden  $Q$  ja  $P$  välillä on Fourier'n-Plancherelin yhteys:  $P = F^{-1}QF$ .<sup>2</sup> Erityisesti, jos  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  on yksikkövektori, niin todennäköisyyksimitat  $X \mapsto p_\psi^Q(X) := \langle \psi | Q(X) \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx$   $Y \mapsto p_\psi^P(Y) := \langle \psi | P(Y) \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} |(F\psi)(y)|^2 dy$  antavat paikan  $Q$  ja liikemäärän  $P$  mittaustulostodennäköisyydet tilassa  $\psi$ .

## Perinteinen oppikirjalähestymistapa

### Tapaus (a-A): preparointeja koskeva ehto

Paikka ja liikemäärä ovat jatkuvia suureita, joten niillä ei voi sanoa olevan tarkkoja arvoja: mille tahansa vektoritalle  $\psi$  ja mille tahansa luvulle  $x \in \mathbb{R}$  saadaan  $p_\psi^Q(\{x\}) = 0$ , ja vastaavasti  $P$ :lle. Sen sijaan jokaista lukua  $x \in \mathbb{R}$  ja positiivilukua  $\epsilon > 0$  kohti on olemassa tiloja  $\psi$  joille  $p_\psi^Q((x - \epsilon, x + \epsilon)) = 1$ . Tässä mielessä kvanttiobjektin paikka ja liikemäärä voidaan erikseen määrittää mielivaltaisen tarkasti. Systemi voidaan valmistaa tilaan, jossa esimerkiksi paikan mittausta varmuudella tuottaa tuloksen halutun luvun  $x \in \mathbb{R}$  mielivaltaisen pienestä ympäristöstä  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ . Tila  $\psi$  voidaan erityisesti valita niin, että todennäköisyyden  $p_\psi^Q$  keskiarvo  $\langle \psi | \hat{Q} \psi \rangle$  on annettu luku  $x$  ja hajonta  $\Delta(Q, \psi)$  on mielivaltaisen pieni.

Paikan ja liikemäärän Fourier'n-Plancherelin yhteydestä sekä Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöstä seuraa perusoppikirjoista tuttu tulos: jokaisessa tilassa  $\psi$  paikan ja liikemäärän mittaustulostodennäköisyyksien  $p_\psi^Q$  ja  $p_\psi^P$  hajontojen  $\Delta(Q, \psi)$  ja  $\Delta(P, \psi)$  tulolle on voimassa relaatio

$$\Delta(Q, \psi) \cdot \Delta(P, \psi) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2)$$

Tämä preparointeja koskeva epäyhtälö on Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen yksi tärkeä ilmentymä ja sen täsmällinen sisältö on tunnettu jo kvanttimekaniikan alkuvuosista asti. Epäyhtälö viittaa erikseen suoritettuihin paikan ja liikemäärän mittaauksiin. Tilannetta voidaan ajatella esimerkiksi niin, että suuri joukko identtisiä, toisistaan riippumattomia kvanttiobjekteja on preparoitu samalla tavoin. Joukko jaetaan kahteen osaan, joista toiselle osajoukolle suoritetaan paikan mittausta ja toiselle liikemäärän mittausta. Epäyhtälö (2) sitoo näin saadut mittaustulostilastot toisiinsa.

### Tapaus (b-B): mittaustarkkuuksia koskeva ehto

Vuoden 1925 mullistavassa kvanttimekaniikan läpimurtoyössään [4] Heisenberg löysi paikka- ja liikemääräsuureille matemaattiset esitykset, jotka **Max Born** (1882–1970) ja **Pascual Jordan** (1902–1980) välittömästi identifioivat matriiseiksi [5]. Näille matriiseille oli voimassa kommutaatiorelaatio  $\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} = i\hbar I$ . Tämän ymmärrettiin heti tarkoittavan rajoituksia paikan ja liikemäärän samanaikaiselle mittaamiselle ja määrittelylle. **John von Neumannin** johdonmukainen kvanttimekaniikan matemaattis-käsitteellinen analyysi vuosilta 1927–32 osoitti muun muassa sen, että kaksi itseadjungoituna operaattorina esitettävää fysikaalista suuretta voidaan mitata yhdessä tarkalleen silloin kun ne kommutoivat keskenään. Tälle tulokselle saatiin myöhemmin useita ekvivalenteja muotoiluja. Erään kehityskulun päätepisteenä voidaan mainita **Kari Ylisen** tulos [6]: kahden itseadjungoidun operaattorin  $\hat{A}$  ja  $\hat{B}$  spektraaliprojektoiden  $A(X)$  ja  $B(Y)$  sekä yksikkövektorin  $\psi$  määrittelemä joukkofunktio

$X \times Y \mapsto \langle \psi | A(X) \wedge B(Y) \psi \rangle$  laajenee todennäköisyyksimitaksi silloin ja vain silloin kun  $\psi$  kuuluu  $\hat{A}$ :n ja  $\hat{B}$ :n kommutointialueeseen  $\text{com}(\hat{A}, \hat{B})$  ts.  $A(X)B(Y)\psi = B(Y)A(X)\psi$  kaikilla (Borelin) joukoilla  $X, Y \subset \mathbb{R}$ .<sup>3</sup>

Paikan ja liikemäärän tapauksessa niiden epäkommutatiivisuus ilmenee tietysti jo relaatiosta  $\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} = i\hbar I$ . Sen sijaan niiden täydellinen epäkommutatiivisuus,  $\text{com}(\hat{Q}, \hat{P}) = \{0\}$ , saadaan sekä epäyhtälöstä (2) että rajoitetuille väleille  $X, Y \subset \mathbb{R}$  saata- vasta relaatiosta  $Q(X) \wedge P(Y) = 0$ , joka ilmaisee sen tunnetun Fourier'n muunnoksia koskevan tuloksen, että nollasta eriävän kompaktitukisen funktion Fourier'n muunnoksen tuki on koko reaalisuora.

Relaatio (2) on mittaustulostilastoja koskeva ehto. Erityisesti luku  $\Delta(Q, \psi)$  ei luonnehdi yksittäisen  $Q$ -mittauksen tarkkuutta. Se, että fysikaalisen suureen hajonta jossakin tilassa  $\psi$  eroaa nollasta ei tarkoita, että tämän suureen mittausta kyseisessä tilassa olisi epätarkka. Kvanttimekaniikan todennäköisyydet eroavat klassisen teorian todennäköisyyksistä juuri siinä, että ne eivät ole luonteeltaan episteemisiä.

Von Neumannin muotoilema kvanttimekaniikka ei sisällä epätarkan mittauksen käsitettä. Jokainen itseadjungoitu operaattori vastaa tarkkaa mittausta, joten tässä teoriassa Heisenbergin epätarkkuusrelaatioilleen ehdottamaa mittaustarkkuustulkintaa ei voitu johdonmukaisella tavalla käsitellä. Fysikkojen laajemmin suosiman Paul Diracin kvanttimekaniikan muotoilu ei tässä suhteessa tuonut asiaan mitään uutta valaistusta. Vaikka siis tulos (b) tunnettiin hyvin ja tulkinta (B) oli monella tavalla intuitiivisesti selvä, ei sen yksityiskohtaista käsittelyä osattu vielä suorittaa.

<sup>2</sup>Sisällytämme Diracin vakion  $\hbar$  muunnokseen  $F$ .

<sup>3</sup>Tässä  $A(X) \wedge B(Y)$  on projektoiden  $A(X)$  ja  $B(Y)$  leikkaus, siis projektio projektoiden  $A(X)$  ja  $B(Y)$  määrittelemien suljettujen aliavaruuksien leikkaukselle.

## Tapaus (c-C): tarkkuus-häiriö-ehto

Kvanttimekaniikan alkuvuosista lähtien oli myös selvää, että mittaus yleensä muuntaa mittauskohdettaan, jopa ennakoimattomalla tavalla. Tämä tuli selkeästi esille jo von Neumannin muotoilemassa kvanttimekaniikan mittausteoriassa, joka sisälsi projektiopostulaattina tunnetun mittauksen synnyttämän tilamuunnoksen: jos diskreetin suureen  $\hat{A}$  mittaus vektoritilassa  $\psi$  tuottaa tulokseksi ominaisarvon  $a_k$ , niin mittauksen seurauksena tämä tilavektori muuntuu tilavektoriksi  $P_k\psi/\|P_k\psi\|$ , missä  $P_k = A(\{a_k\})$  on kyseinen ominaisprojektiio. Tällaisessa mittauksessa  $\hat{A}$  :n kanssa kommutoimattomien suureiden mittaustulostodennäköisyydet muuttuvat.

Vaikka paikka ja liikemäärä jatkuvina suureina eivät tarkkaan ottaen mahdollista ylläkyvatun kaltaista mitausta, voidaan von Neumannin kehittämän mittausteorian puitteissa yleisesti muotoilla suureen  $\hat{A}$  mittauksen aiheuttama muutos systeemillä. Tällainen muutos voidaan vaihtoehtoisesti kuvata tilan muuntumisena (Schrödingerin esitys) tai muiden suureiden muuntumisina (Heisenbergin esitys). Tällöin voidaan osoittaa, että paikan mittaus muuntaa Heisenbergin esityksessä liikemäärää niin, että tämä ”muuntunut”, tai ”häiritty”, liikemäärä on itseasiassa paikkasuureen funktio. Tämä tarkoittaa sitä, että paikan mittauksessa kaikki liikemäärää koskenut informaatio katoaa. Paikan mittauksen on välttämättä oltava epätarkka, jotta liikemäärään liittyvää informaatiota voisi säilyä. Mutta tällöin ajaututaan taas uranuurtajakvanttimekaniikan ulkopuolelle.

## Teorian laajennus

Kvanttimekaniikan fysikaalinen perusta on mittaustulostodennäköisyyksissä: teoria antaa algoritmin laskea todennäköisyyden, jolla annettu suureen mittaus annettussa tilas-

sa tuottaa tietyn tuloksen. Tätä ajatusta seuraten von Neumann osoitti vuonna 1929, että juuri hypermaksimaaliset symmetriset operaattorit, nykykielessä itseadjungoidut operaattorit, ovat sellaisia, että ne yhdessä tilavektoreiden kanssa määrittelevät tällaisia todennäköisyyksiä. Tämä johtuu siitä, että jokaiseen itseadjungoituu operaattoriin  $\hat{A}$  liittyvä yksikäsitteinen spektraalimitta  $A$  niin, että kuvaus  $X \mapsto p_\psi^A(X) = \langle \psi | A(X) \psi \rangle$  on todennäköisyyksimitta kaikilla tilavektoreilla  $\psi$ . Kun  $\psi$  käy läpi kaikki tilavektorit, niin todennäköisyysjakaumat  $p_\psi^A$  määrittelevät suureen  $A$  yksikäsitteisesti.

Von Neumann haki kvanttimekaniikan mittaustulosanalyysissään sellaista fysikaalisen suureen operaattoriesitystä, että tämä operaattori määritteli yhdessä tilavektorin kanssa todennäköisyyksimitan. Tällöin ratkaisuna on juuri itseadjungoitu operaattori, eli yhtäpitävästi spektraalimitta. Myöhempi analyysi on kuitenkin selvästi osoittanut, että vaatimus fysikaalisen suureen operaattoriesityksestä on tarpeettoman rajoittava. Lisäksi se sulkee pois monien perustavien kokeiden realistisen analyysin. Vaatimus, että fysikaalinen suure  $A$  ja tilavektori  $\psi$  määrittelevät todennäköisyyksimitan  $p_\psi^A$  johtaa siihen tulokseen, että  $A$  on semispektraalimitta eli normitettu positiiviopeattorimitta. Spektraalimitta, eli normitettu projektiomitta, on sen erikoistapaus. Tyypillisesti semispektraalimitta määrittelee symmetrisen operaattorin, mutta tämä operaattori ei riitä semispektraalimitan määrittämiseen. Kuitenkin todennäköisyydet  $p_\psi^A$  määrittelevät aina suureen  $A$  yksikäsitteisesti, olipa  $A$  spektraali- tai semispektraalimitta. Tämä laajennus on oleellisesti peräisin 1960-luvulta ja siihen päädyttiin useita eri teitä. Monografiat [7, 8, 9, 10, 11] valaisevat tähän laajennukseen liittyviä näkökulmia. Semispektraalimitat ovat osoittautuneet hyödyllisiksi myös kvanttilaskennan ja kvantti-informa-

tion aloilla [12, 13].

Laajentamalla fysikaalisen suureen matemaattinen esitys spektraalimitasta semispektraalimitaksi teoriaan avautuu mahdollisuus kuvata johdonmukaisella ja epätriviaalilla tavalla fysikaalisten suureiden epätarkkoja mittauksia. Tämä laajennus pitää sisällään myös mahdollisuuden kuvata keskenään epäkommutatiivisten suureiden yhdistettyjä mittauksia. Nämä molemmat seikat ovat avainasemassa ehtojen (B) ja (C) analysoinnissa.

Mittaus määrittelee todennäköisyysjakaumien  $p_\psi^A$  kautta aina mitattavan suureen  $A$ . Samalla tavalla kahden suureen  $A$  ja  $B$  yhdistetty mittaus määrittelee näiden suureiden yhdisteen  $C$ , siis suureen (semispektraalimitan), jolla on marginaali-ominaisuudet

$$\begin{aligned} \langle \psi | C(X \times \mathbb{R}) \psi \rangle &= \langle \psi | A(X) \psi \rangle \\ \langle \psi | C(\mathbb{R} \times Y) \psi \rangle &= \langle \psi | B(Y) \psi \rangle \end{aligned}$$

kaikilla arvojoukoilla  $X$  ja  $Y$  sekä tilavektoreilla  $\psi$ . Todettakoon, että jos jompi kumpi yhteismitattavista suureista  $A$  ja  $B$  on spektraalimitta, ovat suureet  $A$  ja  $B$  välttämättä keskenään kommutatiivisia. Tämä tulos varmistaa paikkaa ja liikemäärää koskevan tuloksen (b).

Vastaavalla tavalla kahden suureen  $A$  ja  $B$  perättäinen mittaus eli jononmittaus määrittelee yhdistetyn suureen  $D$ , jonka ensimmäinen marginaali on ensin mitattu suure  $\langle \psi | D(X \times \mathbb{R}) \psi \rangle = \langle \psi | A(X) \psi \rangle$  ja toinen marginaali on toiseksi mitattun suureen muuntunut versio  $\langle \psi | D(\mathbb{R} \times Y) \psi \rangle = \langle \psi | \tilde{B}(Y) \psi \rangle$ . Jos ensin mitattu suure  $A$  on spektraalimitta, niin muuntunut suure (spektraalimitta tai ei) välttämättä kommutoi  $A$  :n kanssa. Paikan ja liikemäärän tapauksessa tämä ilmaisee juuri sen seikan, että paikan mittauksen seurauksena liikemäärä muuntuu radikaalisti.

Semispektraalimitoilla laajennettu teoria antaa nyt mahdollisuuden kuvata esimerkiksi juuri paikan ja liikemäärän epätarkkoja yhteismitauksia. Tällainen mittaus määrittelee yhdiste-

tyn suureen  $C$ , jonka marginaalitodennäköisyyksistä  $X \mapsto \langle \psi | C(X \times \mathbb{R}) \psi \rangle$  ja  $Y \mapsto \langle \psi | C(\mathbb{R} \times Y) \psi \rangle$  määräytyvät suureet  $\tilde{Q}$  ja  $\tilde{P}$  edustavat paikan ja liikemäärän epätarkkoja mittauksia. Määrittelemällä tässä sopivalla tavalla epätarkkuudet, siis suureiden  $\tilde{Q}$  ja  $\tilde{P}$  poikkeamat suureista  $Q$  ja  $P$ , voimme kvantitatiivisesti tutkia kysymystä (B).

Vastaavasti, kun jononmittauksessa suoritetaan ensin esim. paikan epätarkka mittaus  $\tilde{Q}$ , niin määrittämällä muuntunut liikemäärä  $\tilde{P}$  voimme taas analysoida kysymystä paikan mittaustarkkuuden ja liikemäärän kokeman muutoksen välisestä riippuvuudesta. Koska liikemäärän kokema muutos saadaan vertaamalla suureita  $P$  ja  $\tilde{P}$  keskenään, on jononmittaus tältä osin matemaattiselta muotoilultaan identtinen yhteismittauksen kanssa. Näin ollen molempia kysymyksiä voidaan analysoida samalla kertaa.

## Paikan ja liikemäärän epätarkka yhteismittaus

### Suureen epätarkka mittaus: eräs muotoilu

Tarkastellaan suureen  $A$  mittausta tilanteessa, jossa käytössä oleva mittalaite ei ole ehdottoman tarkka. Oletetaan, että mittalaitteen äärellistä erotuskykyä voidaan kuvata todennäköisyystiheysfunktioilla  $f$ . Mittalaite määrittelee kullekin tilalle  $\psi$  todennäköisyyksien  $p_\psi^A(X)$  sijaan funktiolla  $f$  painotetut tai sumennetut todennäköisytydet

$$p_\psi^{(A,f)}(X) = \int f(x) p_\psi^A(x+X) dx \quad (3)$$

Tällä tavoin pari  $(A, f)$  määrittelee suureen  $A$  sumean tai epätarkan version, jota merkitsemme symbolilla  $A^f$ . Matemaattisesti tarkasteltuna  $A^f$  on semispektraalimita.

Kuten aikaisemmin jo totesimme,

tarkan (eli spektraalimitana esitetävän) suuren  $A$  hajonta  $\Delta(A, \psi)$  saadaan sopivalla tilavektorin  $\psi$  valinnalla mielivaltaisen pieneksi. Sumean suureen  $A^f$  hajonnalle sen sijaan on voimassa

$$\Delta(A^f, \psi) = \sqrt{\Delta(A, \psi)^2 + \Delta(f)^2} \geq \Delta(f), \quad (4)$$

joten hajonta on aina vähintään äärellisestä mittaustarkkuudesta aiheutuvan kohinan  $\Delta(f)$  suuruinen. Näin ollen todennäköisyystiheyden  $f$  hajonta  $\Delta(f)$  voidaan tulkita kuvavan sumean suureen  $A^f$  mittauksen tarkkuutta.

### Sumean paikan ja sumean liikemäärän yhdistetty mittaus

Epätarkkuuden mukaantuominen edellisessä jaksossa kuvatulla tavalla avaa uuden kysymyksen: voidaanko epätarkka paikka  $Q^f$  ja epätarkka liikemäärä  $P^g$  mitata yhdessä? Jos voidaan, asettaako tämä ehtoja mittaustarkkuuksia luonnehtiville funktioille  $f$  ja  $g$ ?

On ollut jo kauan tiedossa [7], että sumea paikka  $Q^f$  ja sumea liikemäärä  $P^g$  ovat yhteismitattavia jos epätarkkuusfunktiot  $f$  ja  $g$  saadaan jostakin (neliöllisesti integroituvasta) kompleksiarvoisesta funktiosta  $\phi$  ja sen Fourier'n muunnoksesta  $\hat{\phi} = F\phi$  kaavalla

$$f = |\phi|^2, \quad g = |\hat{\phi}|^2. \quad (5)$$

Tällöin suureiden  $Q^f$  ja  $P^g$  yhteinen mittaus voidaan toteuttaa funktioon  $\phi$  liittyvän faasiavaruussuureen mittauksena. Tällainen mittaus voidaan aina reaalisoida myös jononmittauksena, jossa ensimmäisen suureen mittaus on epätarkka [14]. Yhtälöiden (5) seurauksena saadaan epätarkkuusfunktioiden  $f$  ja  $g$  hajontoja koskeva epäyhtälö

$$\Delta(f) \cdot \Delta(g) = \Delta|\phi|^2 \cdot \Delta|\hat{\phi}|^2 \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (6)$$

Reinhard Wernerin paikan ja liikemäärän yhteismitattavuuden ongelmaan uusia näköaloja avanneen työn [15] pohjalta on voitu osoittaa [16], että sumeat suureet  $Q^f$  ja  $P^g$  ovat yhteismitattavia ainoastaan jos epätarkkuusfunktiot  $f$  ja  $g$  toteuttavat ehdon (5). Siispä epäyhtälö (6) on voimassa kaikissa näiden suureiden yhteismittauksissa ja se voidaan siten tulkita mittaustarkkuuksia rajoittavaksi relaatioksi. Vastaavasti (6) voidaan tulkita myös jononmittauksia koskevaksi relaatioksi, jossa funktioiden hajonnat kvantifioivat ensiksi mitatun suuren epätarkkuuden ja sen aiheuttaman häiriön toiseksi mitattuun suureeseen.

### Yleinen epätarkkuusrelaatio

Yhtälössä (3) määritelty sumennettu todennäköisyysjakauma on eräs luonnollinen tapa kuvata mittauksen epätarkkuutta. Kuten edellä näimme, tämä johtaa sumeiden suureiden yhteismittauksia rajoittavaan epäyhtälöön (6). Kysymystä paikan ja liikemäärän epätarkasta yhteismittauksesta voidaan tarkastella myös yleisemmältä näkökannalta, jolloin epätarkkojen mittausten ei tarvitse välttämättä olla kaavan (3) muotoa.

Yleisimmässä tapauksessa lähtökohtana on kahden suureen  $A$  ja  $B$  yhteismittaus, jossa suureen  $A$  mittauksella pyritään saamaan likimääräistä tietoa paikkasuureesta  $Q$  ja vastaavasti suureella  $B$  pyritään ap-proksimoimaan liikemäärää  $P$ . Tällaista mittausta voimme siten kutsua paikan ja liikemäärän epätarkaksi tai likimääräiseksi yhteismittaukseksi. Suureiden  $A$  ja  $B$  tarkkuuksia voidaan arvioida usealla eri tavalla ja seuraavaksi käsittelemme erästä mahdollista tapaa [14]. Epätarkkuusfunktioiden  $f$  ja  $g$  hajonnat  $\Delta(f)$  ja  $\Delta(g)$  eivät enää sovellu epätarkkuuden mitaksi, sillä  $A$  ja  $B$  eivät välttämättä ole muotoa  $A = Q^f$  ja  $B = P^g$ .

Kuten kappaleessa ”Tapaus (a-A): preparointeja koskeva ehto” totesimme, mielivaltaisen pientä väliä

$I \subset \mathbb{R}$  kohden on aina olemassa vektoritiloja  $\psi$  joille  $p_\psi^Q(I) = 1$ . Tämä ominaisuus ilmentää paikkasuureen  $Q$  absoluuttista tarkkuutta. Semispektraalimittana esitettävällä suureella  $A$  ei yleisesti ole tällaista ominaisuutta; todennäköisyys 1 voi olla epätarkkuuden takia saavuttamattomissa. Suureen  $A$  tarkkuuden kvantifioimiseksi kiinnitämme jonkin varmuusasteen  $0 < r < 1$ , joka tyypillisesti on melko lähellä ykköstä hyvää approksimointia ajatellen (esimerkiksi  $r = 0.9$ ). Tarkkuutta voidaan kuvata luvulla  $\gamma_r(A)$ , joka on pienimmän välin  $I$  pituus jolla todennäköisyys  $r$  on vielä saavutettavissa, ts. on olemassa vektoritila  $\psi$ , jolle  $p_\psi^A(I) > r$ . Suureille  $Q$  ja  $P$  saamme  $\gamma_r(Q) = \gamma_r(P) = 0$ , joka kuvaa juuri näiden suureiden ehdotonta tarkkuutta.

Mikä tahansa suure  $A$  ei kelpaa approksimoimaan paikkasuuretta  $Q$ , sillä  $A$ :n tulisi antaa likimääräistä tietoa  $Q$ :n mittauksesta. Intuitiivisesti ajateltuna suureen  $A$  antamien mittaustulostodennäköisyysjakaumien pitäisi olla jollakin tavalla lähellä suureen  $Q$  vastaavia jakaumia. Matemaattisesti muotoiltuna approksimoinnin kriteeriksi voidaan valita esimerkiksi seuraava ehto, jonka tulisi olla voimassa kaikilla vektoritiloilla  $\psi$ : jos  $I$  on sellainen väli että  $p_\psi^Q(I) = 1$ , niin on olemassa (äärellinen) väli  $J \supseteq I$  jolle  $p_\psi^A(J) > r$ .

Pienimmän edellisen approksimointiehton täyttävän välin  $J$  pituuden suhde välin  $I$  pituuteen kuvaa suureen  $A$  kykyä approksimoida paikkasuuretta  $Q$ . Selvästi luku  $\gamma_r(A)$  antaa alarajan välin  $J$  koolle. Näin ollen luku  $\gamma_r(A)$  antaa myös arvion sille, miten hyvin suure  $A$  voi parhaimmillaan approksimoida suuretta  $Q$ . Jos esimerkiksi  $A = Q^f$ , niin luvulle  $\gamma_r(Q^f)$  saadaan lauseke

$$\gamma_r(Q^f) = \inf\{a > 0 \mid \max_{x_0 \in \mathbb{R}} \int_{x_0}^{x_0+a} f(x) dx > r\}. \quad (7)$$

Tässä tapauksessa  $\gamma_r(Q^f)$  on siis hajonnan  $\Delta(f)$  kaltainen mitta epätarkkuusfunktion  $f$  leveydestä.

Oletetaan nyt, että  $A$  ja  $B$  ovat sellaisia yhteismitattavia suureita, että  $A$  toteuttaa edellisen approksimointiehton  $Q$ :n osalta ja  $B$  toteuttaa vastaavan ehdon  $P$ :n osalta. Tällöin voidaan osoittaa [17], että epäyhtälö

$$\gamma_r(A) \cdot \gamma_r(B) \geq 2\pi\hbar(2r-1)^2 \quad (8)$$

on voimassa kaikilla  $\frac{1}{2} < r < 1$ . Approksimoivat suureet  $A$  ja  $B$  ovat siis välttämättä epätarkkoja ja niiden epätarkkuuksia sitova ehto on Heisenbergin alkuperäisen relaation (1) kaltainen. Kuten edellä jo totesimme, tämä tulos soveltuu myös paikan ja liikemäärän tarkkuus-häiriö relaation kvantifioimiseen.

Voimme siis todeta, että Werner Heisenbergin intuitiiviset ajatukset (a-A), (b-B), ja (c-C) voidaan jo kaikki johtaa kvanttimekaniikan perusteoriasta.

## Viitteet

[1] W. Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Z. Phys.*, 43:172–198, 1927.

[2] P. Busch, T. Heinonen, and P. Lahti. Heisenberg’s uncertainty principle. *quant-ph/0609185*, 2006.

[3] P. Lahti. Epätarkkuusperiaatteesta ja komplementaaristen fysikaalisten suureiden samanaikaisesta mittaamisesta. *Arkhimedes*, 35:257–274, 1983.

[4] W. Heisenberg. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Z. Phys.*, 33:879–893, 1925.

[5] M. Born and P. Jordan. Zur Quantenmechanik. *Z. Phys.*, 34:858–888, 1925.

[6] K. Ylinen. On a theorem of Gudder on joint distributions of observables. In P. Lahti and P. Mittelstaedt, editors, *Symposium on the Foundations of Modern Physics*, pages 691–694, Singapore, 1985. World Scientific.

[7] E.B. Davies. *Quantum Theory of Open Systems*. Academic Press, London, 1976.

[8] G. Ludwig. *Foundations of Quantum Mechanics I*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[9] C.W. Helstrom. *Quantum Detection and Estimation Theory*. Academic Press, New York, 1976.

[10] A.S. Holevo. *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.

[11] P. Busch, M. Grabowski, and P.J. Lahti. *Operational Quantum Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. second corrected printing.

[12] M. Nielsen and I. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[13] S. Stenholm and K.-A. Suominen. *Quantum Approach to Informatics*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2005.

[14] C. Carmeli, T. Heinonen, and A. Toigo. Intrinsic unsharpness and approximate repeatability of quantum measurements. *J. Phys. A*, 40:1303–1323, 2007.

[15] R. Werner. The uncertainty relation for joint measurement of position and momentum. *Quant. Inf. Comp.*, 4:546–562, 2004.

[16] C. Carmeli, T. Heinonen, and A. Toigo. On the coexistence of position and momentum observables. *J. Phys. A*, 38:5253–5266, 2005.

[17] P. Busch and D. Pearson. Universal joint-measurement uncertainty relation for error bars. *math-ph/0612074*, 2006.